Giljermo Martines

BORHES I MATEMATIKA[1]

U uvodu u knjigu *Matematika i imaginacija* Edvarda Kesnera i Džejmsa Njumena, Borhes kaže da matematika, isto kao i muzika, može da postoji nezavisno od univerzuma. Hvala vam što ste i vi danas, nezavisno od univerzuma, došli da čujete ovo predavanje. Želim da zahvalim i Ambasadi Republike Argentine, Institutu Servantes u Beogradu i Filozofskom fakultetu u Novom Sadu, što su me pozvali da govorim o ovoj temi.

Ugao, kosina i tumačenje. Tomas Man i dodekafonija. Igra tumačenja kao igra ravnoteže

Dakle, Borhes i matematika. Kad god neko odabere ugao, temu, na neki način unese izmenu u fenomen koji namerava da proučava. To fizičari dobro znaju, zar ne? Takođe, kada neko želi da analizira delo nekog pisca iz određenog ugla, ubrzo se nađe usred živog peska tumačenja. U tom slučaju treba imati u vidu da je igra tumačenja igra ravnoteže u kojoj čovek može da pogreši, namerno ili slučajno. Recimo, ako sagledamo Borhesove tekstove sa čisto matematičkog, usko specijalizovanog aspekta, možemo ostati iznad nivoa teksta. Pod „iznad" ovde podrazumevam spoljašnju stvarnost: mogli bismo da nateramo tekst da kaže stvari o kojima zapravo ne govori, niti ima nameru da govori. To je greška erudicije. S druge strane, ako su nam sasvim nepoznati matematički elementi koji su višestruko prisutni u Borhesovom delu, možemo ostati ispod nivoa teksta. Stoga ću pokušati da izvedem vežbu ravnoteže. Ovde u sali verovatno ima mnogo dobrih matematičara, ali za to što ću govoriti dovoljno je da znaju da broje do deset. To je moj lični izazov. Sve što kažem trebalo bi da bude razumljivo samo na osnovu brojanja do deset.

Postoji drugo, još delikatnije pitanje, na koje je ukazao Tomas Man kada su ga naterali da ubaci belešku na kraju *Doktora Faustusa* kako bi priznao intelektualno autorstvo Arnolda Šenberga u muzičkoj teoriji dodekafonije. Tomas Man je to nevoljno učinio, jer je smatrao da je ta muzička teorija mutirala u nešto drugo kada ju je on književno uobličio „da bi je u idealnom kontekstu povezao sa fiktivnim likom" (njegovim kompozitorom Adrijanom Leverkinom). Na isti način su matematički elementi koji se pojavljuju u Borhesovom delu uobličeni i preobraženi u „nešto drugo": u književnosti, i pokušaćemo da ih prepoznamo, a da se ne odvojimo od tog književnog konteksta.

Na primer, Borhes na početku eseja „Kornjačini avatari" kaže: „Postoji jedan pojam koji izjeda i razara druge pojmove. Ne govorim o Zlu čije je ograničeno carstvo etika; govorim o beskonačnosti", o povezanosti beskonačnosti sa Zlom, o nadmoći malignosti, podrugljivoj

---

[1] Predavanje održano na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, 23. novembara 2015. (*Prim. prev.*)

ali preciznoj, koja ustanovljava, neposredno uklanja beskraj iz spokojnog sveta matematike i stavlja pod blago preteće svetlo svu smernu raspravu u formulama, gotovo tehničku, koja sledi. Kada u nastavku kaže da je višeglava hidra prefiguracija ili simbol geometrijskog napretka, ponavlja se igra projektovanja nakaznosti i „prigodnog užasa" nad matematički preciznim konceptom.

Koliko je Borhes znao o matematici. Oprez nad njegovom bibliotekom. Istina u matematici i književnosti

Koliko je Borhes znao o matematici? On sam kaže u istom tom eseju: „Nakon pet, šest godina metafizičkog, teološkog, matematičkog učenja bih bio kadar da pažljivo sročim povest o beskonačnosti." Ta rečenica je dovoljno dvosmislena da bi bilo teško razlučiti da li je on zaista posvetio tolike godine učenju ili je to samo bio plan za budućnost, ali je izvesno da Borhes zna barem teme koje su sadržane u knjizi za koju je napisao predgovor, *Matematika i imaginacija*, a ima ih prilično. To je dobar dokaz onoga što se može naučiti iz prvog kursa algebre i analize na univerzitetu. Pomenuto delo obrađuje logične paradokse, pitanje različitih vrsta beskonačnosti, pojedinih osnovnih problema topologije, teoriju verovatnoće. U predgovoru toj knjizi Borhes se usput priseća da, po mišljenju Bertranda Rasela, široko polje matematike možda nije ništa drugo do široko polje tautologije, i tom opaskom Borhes predočava nešto što je, barem tih godina, bilo u žiži matematičke javnosti, ključna rasprava o temeljima matematike. Ta rasprava je donela podelu na polove i otvorila oštre debate, zasnovane na pitanju istine: istinito protiv dokazivog.

Recimo da u svom uobičajenom preispitivanju univerzuma oblika i brojeva matematičari uvek pronalaze povratne, uzročno-posledične veze, izvesne odnose koji se uvek mogu proveriti, i navikli su da veruju da ti odnosi, ukoliko su istiniti, to jesu iz određenog razloga, usaglašeni su u skladu sa spoljašnjim, platonskim poretkom, koji se mora dešifrovati. Kada nađu taj duboki razlog – uglavnom skriven – izlažu ga na način koji se zove demonstracija, dokaz.

Treba imati u vidu da u matematici, baš kao i u umetnosti, postoje dva momenta: trenutak koji možemo nazvati iluminacijom, inspiracijom, jedinstvenim, čak „elitističkim" trenutkom u kojem matematičaru, u nedostižnom platonskom svetu, blesne rezultat koji smatra tačnim i, u sledećem trenutku, recimo demokratičnom, u tu istinitost treba da uveri svoju kritičku zajednicu. Na sasvim isti način umetnik ima fragmente jedne vizije koje kasnije mora da uobliči u književno štivo, u sliku ili bilo šta drugo. U tom smislu stvaralački procesi umnogome liče jedan na drugi. U čemu je razlika? U tome što postoji niz formalnih načela u skladu s kojima istina koju matematičar izlaže svojim kritičarima može da se demonstrira korak po korak, od samog početka, i oko tih „pravila igre" svi matematičari se slažu. Za razliku od njih, demonstracija estetske činjenice nije toliko uopštena. Estetska činjenica uvek je podvrgnuta sudu autoriteta, mode, kulturnih dodataka, lične odluke i naposletku – često savršeno hirovitog – ukusa.

Dakle, matematičari su vekovima mislili da su u svojim domenima ta dva koncepta, istinito i dokazivo, u osnovi ekvivalentni. Da, ako je nešto tačno, uvek može da se izvede razlog te tačnosti kroz logične korake, demonstracijom, dokazom. Međutim, da istinito nije isto što i dokazivo oduvek znaju, na primer, sudije: zamislimo da imamo jedan zločin u zatvorenoj sobi sa samo dva moguća osumnjičena. Svaki od njih zna celu istinu o zločinu: ja sam ga počinio ili ja ga nisam počinio.[2] Postoji jedna istina, i oni je znaju, ali pravda mora da se približi toj istini drugim, posrednim postupcima. Pravda često ne uspe da dokaže ni krivicu jednog ni nevinost drugog. Nešto slično se dešava i u arheologiji: postoje samo provizorne istine, konačna istina je van dometa.

Tako, na drugim područjima, istina ne mora nužno da se poklapa sa dokazivim. Bertrand Rasel se možda najviše od svih posvetio izvođenju dokaza da unutar matematike ipak mogu da postoje dva istovetna termina, da matematika nije ništa drugo do „opširna tautologija". To je na izvestan način bio i deo Hilbertovog programa, veliki pokušaj matematičara da ponude garancije da će sve što se dokaže kao istinito, bilo kojim metodama, kasnije moći da se dokaže u skladu sa formalnim načelima koja čak mogu biti lišena inteligencije, algoritam koji bi mogao da potkrepi istinu na mehanički način i da je modifikuje u računaru. To bi, u osnovi, značilo svesti matematiku na to što može da dokaže kompjuter.

Naposletku je dokazano, a to je bio dramatičan rezultat Kurta Gedela tridesetih godina, njegova čuvena teorema o nepotpunosti – da stvari nisu takve, da matematika više liči na kriminologiju u tom pogledu: postoje tvrdnje koje su istinite, a koje ipak ostaju van dometa formalnih teorija. Drugim rečima, formalne teorije ne mogu demonstrirati tvrdnju niti mogu demonstrirati njenu negaciju – ni krivicu ni nevinost. Moja namera je da pokažem da je Borhes nazirao poreklo te diskusije (premda po svoj prilici nije imao saznanja o njenom raspletu).

Matematički elementi u Borhesovom delu

Postoje raznovrsni matematički elementi u celokupnom Borhesovom delu. Prirodan i očigledan korak, kada neko pristupi toj temi, jeste istraživanje svih matematičkih tragova u njegovim tekstovima. To je već urađeno, i to veoma dobro, u brojnim esejima objavljenim u knjizi *Borhes i nauka* (izdavač „Eudeba"). Tamo možete naći sve eseje o Borhesu i matematici, Borhesu i naučnom istraživanju, o temi pamćenja, o Borhesu i fizici. Nekom prilikom sam u šali rekao da je moj omiljeni esej „Borhes i biologija". Nakon izvesnog okolišanja, pomalo sumorno, gotovo kao da se izvinjava, autor odlučuje da napiše da, nakon što je pročitao celokupno Borhesovo delo, mora da kaže da ne postoji nikakva veza između Borhesa i biologije. Nikakva! Čovek je sa užasom otkrio nešto na ovom svetu – biologiju – što Borhes nije dotakao.

Ali zato u njegovom delu postoje elementi matematike, štaviše, oni su sveprisutni. Pomalo ću zloupotrebiti svoj položaj pisca kako bih pokušao da učinim nešto malo drugačije: pokušaću da povežem matematičke elemente sa Borhesovim stilom. Pokušaću da ukažem na stilsku, a ne tematsku povezanost. Ali, u svakom slučaju, spominjem neke od tekstova gde se matematičke ideje pokazuju mnogo jasnije: u pričama „Medaljon", „Peščana knjiga", „Vavilonska biblioteka", „Vavilonska lutrija", „O strogosti u nauci", „Ispitivanje dela Herberta Kvejna", „*Argumentum ornithologicum*"; esejima „Večna trka Ahila i kornjače", kao i „Kornja-

[2] Ovu tvrdnju G. Martines koristi u svom romanu *Neprimetni zločini*, str. 50. (*Prim. prev.*)

čini avatari“; „Analitički jezik Džona Vilkinsa“, „Doktrina ciklusa“, „Paskal“, kao i „Paskalova sfera“, itd. Postoje tekstovi koji su prave male lekcije iz matematike. Uprkos tome, uprkos toj raznolikosti, mislim da postoje tri teme koje se kod Borhesa ponavljaju. A te tri teme nalaze se objedinjene u priči „Alef“, pa vam predlažem da ih tu i proučimo.

Kantorova beskonačnost

Spomenuću vam ih obrnutim redom u odnosu na redosled pojavljivanja. Prvi element je beskonačnost odnosno beskonačnosti. Kaže Borhes, pred kraj priče:

> *Dodao bih još dve primedbe: jednu o prirodi Alefa, drugu o njegovom imenu. Ono predstavlja, kao što je poznato, prvo slovo u alfabetu svetog jezika. To što sam ga upotrebio za svoju priču nije slučajno. U Kabali, to slovo označava En Sof., bezgranično i čisto božanstvo. Rečeno je i da je u obliku čoveka koji pokazuje na nebo i na Zemlju da bi istakao kako je donji svet ogledalo i mapa gornjeg. Za Megen-lere (Teoriju skupova), ono je simbol beskonačnih brojeva u kojima celina nije veća od pojedinačnih delova.* (prevod D. Bajić)[3]

Megenlehre je nemački naziv za teoriju količine. Simbol alefa, koji mi matematičari pojednostavljujemo kada crtamo, liči na ovo: $\aleph$

Ruka koja pokazuje ka nebu i druga koja pokazuje ka zemlji. Simbol trans-konačnih brojeva u kojima, kako kaže Borhes, *celina nije veća od pojedinačnih delova*. To je jedan od matematičkih iskaza koji su Borhesa istinski fascinirali. To je razorilo aristotelovski postulat prema kojem celina mora biti veća od svakog pojedinačnog dela, i voleo bih da vam pružim kratko objašnjenje otkuda ta ideja o beskonačnom u matematici.

Do 1870, razdoblja kada Georg Kantor počinje da radi na teoriji skupova, matematičari su koristili drugi simbol za beskonačnost, položenu osmicu ∞, i smatrali da u stvarnosti postoji samo jedna beskonačnost; nije ostavljena mogućnost da možda postoje različite beskonačnosti. Kako Kantor dolazi do svoje zamisli beskonačnosti, koja dovodi do prvog paradoksa?

Da bismo to razumeli, moramo se setiti šta znači brojati. Čovek može da misli na proces brojanja na dva načina: pretpostavimo da u prvom skupu imamo 3 osobe – jer, kao što smo rekli na početku, znamo da brojimo samo do 10 – a da u drugom skupu imamo 3 stolice.

Neko bi mogao da kaže, u redu, znam da ima osoba isto koliko i stolica, jer ovde mogu da izbrojim tri osobe, a tamo tri stolice, odnosno u prvom skupu izdvajam količinu koju poznajem: 3, i pošto je 3 = 3 zaključujem da ta dva skupa imaju istu količinu elemenata. Međutim, pretpostavimo da ja igram karte sa detetom od tri godine. Dete, kao i mi danas ovde, zna da broji samo do deset, ali zna da ako meni da prvu kartu, ostaje mu druga, ako mi da treću, ostaje mu četvrta itd., i tako podeli čitav špil. Iako ne ume da kaže koju *količinu* karata ima u rukama (jer zna da broji samo do deset), ipak zna nešto da kaže, ipak ima element izvesnosti, a to je *da i ono i ja imamo istu količinu karata*. To dakle zna, iako ne zna *koliko* ih ima. Na primeru stolica takođe možemo zaključiti da postoji ista količina ljudi i

---

[3] H. L. Borhes: *Izabrana dela (proza, poezija, eseji)*, priredio R. Konstantinović, Draganić, Beograd, 2006. (*Prim. prev.*)

stolica tako što ćemo svaku osobu staviti da sedne na jednu stolicu i dokazati da postoji savršena podudarnost u kojoj nijedna stolica ne ostaje bez čoveka niti čovek bez stolice. Na isti način, kada gledamo vojnu paradu, ne možemo na prvi pogled reći koliko ima jahača ili koliko konja, ali ako nešto ipak znamo, to je da konja i vojnika ima jednako.

Priznajem da je to trivijalno, ali ponekad iz trivijalnosti nastaju velike ideje. U tome je tajna mađioničara matematike. Obratite pažnju na to što radi Kantor, u osnovi vrlo jednostavno, ali izvanredno. To što on pronalazi je pojam da je konačni kontekst isto što i „posedovanje iste količine elemenata". On kaže: „U konačnom kontekstu, skupovi A i B imaju istu količinu ako i samo ako mogu međusobno da uspostave savršenu podudarnost jedan na jedan." Tu tvrdnju je vrlo lako proveriti. Ali šta se dešava kada skočimo u beskonačnost? Jedan od dva ekvivalentna koncepta: „količina elemenata" više nema smisla. Šta znači količina elemenata beskonačnog skupa kada čovek ne može da završi brojanje? Taj deo dakle više ne mogu da koristim, ali zato drugi deo još uvek mogu. Drugi deo preživljava, još uvek možemo da ustanovimo, za beskonačne skupove, savršenu podudarnost jednog i drugog kao što smo uradili sa ljudima i stolicama.

Međutim, tada počinju da se dešavaju čudne stvari. Naime, postoji očigledan način da se uspostavi savršena podudarnost jedan na jedan između svih prirodnih brojeva, brojeva koje koristimo za nabrajanje, i parnih brojeva. Jedinici dodeljujemo dvojku, dvojki četvorku, trojki šesticu itd. I ovde, prinuđeni Kantorovom definicijom, moramo da kažemo da ima „isto toliko" prirodnih koliko i parnih brojeva. Međutim, parni brojevi su „polovina" prirodnih, u smislu da prirodne brojeve dobijamo kada spojimo parne i neparne. Tada zaista postoji jedan deo, parni, koji je jednako velik kao i celina. *Postoji jedan deo koji je jednak celini*. Ta vrsta paradoksa je oduševljavala Borhesa: u matematičkoj beskonačnosti, celina nije nužno veća od bilo kog dela. Postoje posebni delovi koji su jednako veliki kao i celina. Postoje delovi koji su jednaki celini.

Rekurzivni objekti

Neko bi mogao da apstrahuje to neobično svojstvo beskonačnosti i da misli na druge objekte, na druge situacije, u kojima jedan deo objekta čuva informaciju o celini. Njih ćemo nazvati *rekurzivni* objekti. Tako bi Borhesov Alef, mala sfera koja u sebi sadrži sve prizore univerzuma, mogla biti fiktivni rekurzivni objekat. Kada Borhes kaže da primena naziva Alef na tu sferu nije slučajna i odmah ukazuje na njegovu povezanost sa svojstvom beskonačnosti, on svoju ideju umeće u okvir povoljnog ambijenta, i objašnjava to u svom eseju „Umeće pripovedanja i magija" kada analizira problem verodostojnosti kentaura. On je stavlja u okvir koji je čini uverljivim: kao što u beskonačnosti jedan deo odgovara celini, može se zamisliti da postoji deo univerzuma koji čuva informaciju o svemu.

Postoje i drugi rekurzivni objekti kojima se Borhes poigrava u svom delu. Na primer, mape koje rastu u kratkoj prozi „Strogost u nauci" gde mapa samo jedne provincije okupira čitav grad i u čijim su se „pustinjama Zapada očuvale raskomadane ruševine zemljovida, naseljene životinjama i prosjacima".[4] Takođe, s tačke gledišta biologije, ljudsko biće bi bilo

[4] J. L. Borges: *Sabrana djela*, grupa prevodilaca, Grafički zavod Hrvatske, Zagreb, 1985.

rekurzivan objekat. Dovoljna je jedna ćelija ljudskog bića da bi se napravio klon. Mozaici su jasno rekurzivni objekti, figura sa prve pločice širi se na celinu.

Pomislimo sada na predmete koji imaju *suprotno* svojstvo. Koji bi bili antirekurzivni objekti, da ih tako nazovemo? Predmeti na kojima nijedan deo ne zamenjuje celinu. Predmeti kod kojih je svaki deo suštinski. Mogli bismo da kažemo: konačni skupovi. Ja bih rekao: razumljiva slagalica. U razumljivoj, logičkoj slagalici čovek ne bi morao da olakšava sebi stvari ponavljajući mustru. Baš kao i ljudsko biće sa egzistencijalne tačke gledišta. Postoji jedna zastrašujuća rečenica koja nije Sartrova već Hegelova, a glasi: „Čovek nije ništa drugo do niz sopstvenih postupaka." Koliko god da je bezgrešno bilo ponašanje jednog čoveka tokom svakoga dana i svake godine njegovog života, on uvek ima vremena da učini poslednji postupak koji će protivrečiti, upropastiti, uništiti sve što je bio do tog trenutka. Ili obrnuto, da iskoristimo obrt koji je Tomas Man upotrebio u romanu *Izabranik*, zasnovanom na životu Svetog Gregorija: nije važno koliko je incestuozan ili grešan čovek bio čitavog svog života, uvek može da se iskupi za svoje grehe i da postane papa.

Beskonačnost i Peščana knjiga

To što sam do sada rekao o beskonačnom bilo bi dovoljno da razjasni ovaj mali odlomak. Još malo ću produžiti ovu temu da bih objasnio nešto što je povezano sa „Vavilonskom bibliotekom" i „Peščanom knjigom". Maločas smo videli da postoji „isto toliko" prirodnih koliko i parnih brojeva. Šta bi se desilo kada bismo razmotrili razlomke? Razlomci su veoma važni za Borhesovo mišljenje. Zašto? Setimo se da se razlomci, koji se zovu još i racionalni brojevi, dobijaju kada se celi brojevi podele, i možemo ih smatrati parovima celih brojeva: jedan ceo broj je brojilac, a drugi ceo broj (osim nule) imenilac: $^3/_5$, $^5/_4$, $^7/_6$, $^7/_{16}$ ... Koje je svojstvo tih brojeva, svojstvo koje koristi Borhes u svojim pričama? *Između svaka dva racionalna broja nalazi se racionalan broj*. Između 0 i 1 je $^1/_2$, između 0 i ½ je $^1/_4$, između 0 i ¼ je $^1/_8$ itd. Dakle, uvek se može deliti sa 2.

Na primer, kada ja želim da skočim sa 0 na prvi razlomljeni broj, nikada ne mogu da nađem taj prvi broj uobičajenim redom jer uvek stoji jedan između. Upravo to svojstvo Borhes koristi u *Peščanoj knjizi*. Setite se da postoji momenat u toj priči u kojem se Borhesov lik nađe pred izazovom u trenutku kada otvori prvu stranicu *Peščane knjige*:

> *Rekao mi je da se njegova knjiga zove Knjiga od peska jer ni knjiga ni pesak nemaju ni početak ni kraj. Tražio je da pronađem prvu stranu. Spustih levu ruku na naslovnu stranu i otvorih knjigu palcem gotovo slepljenim za sadržaj. Sve beše uzalud: nekoliko listova stalno se umetalo između naslovne strane i šake. Kao da su izvirivali iz knjige.*[5] (prevod D. Bajić)

Prednja korica *Peščane knjige* bila bi nula, zadnja korica jedan, a stranice bi odgovarale racionalnim brojevima između 0 i 1. U razlomcima se ne može naći prvi broj posle 0 ni poslednji pre 1. Uvek ima brojeva koji se umeću između njih. Čovek će se naći pred izazovom da proveri da li je beskonačnost racionalnih brojeva tešnja, gušća, ispunjenija.

---

[5] H. L. Borhes: *Izabrana dela (proza, poezija, eseji)*, priredio R. Konstantinović, Draganić, Beograd, 2006.

Drugi izazov koji nam donose beskonačni brojevi je iskaz da to nije tako, odnosno, da ima „isto toliko" racionalnih brojeva koliko i prirodnih. Kako to možemo videti?

Pošto su razlomci parovi celih brojeva, brojilac/imenilac, svi (pozitivni) razlomci predstavljeni su na ovoj slici:

$^1/_1$ $^1/_2$ $^1/_3$ $^1/_4$ $^1/_5$ ...
$^2/_1$ $^2/_2$ $^2/_3$ $^2/_4$ $^2/_5$ ...
$^3/_1$ $^3/_2$ $^3/_3$ $^3/_4$ $^3/_5$ ...
$^4/_1$ $^4/_2$ $^4/_3$ $^4/_4$ $^4/_5$ ...

U prvom redu beležim sve razlomke koji imaju brojilac 1, u drugom redu sve koji imaju brojilac 2, u trećem redu sve koji imaju brojilac 3... Očigledno je kada ih ovako napišemo da ima nekih koji se ponavljaju, na primer 3/3 je isto što i 2/2 ili 1/1. Odnosno, neki razlomci će biti zabeleženi više puta, ali to nije važno. Ko može više, može manje: ako mogu da brojim s ponavljanjima, mogu da brojim i bez ponavljanja. To što me zanima je činjenica da se svi pozitivni razlomci u nekom trenutku ovde pojavljuju. Ostaje mi polovina negativnih razlomaka. Ali ako znam da brojim pozitivne, lako je brojati negativne. Matematičari će mi oprostiti izvesnu površnost, jer ne govorim dovoljno precizno.

Želim da vam skrenem pažnju, želim da vas uverim, da se na ovoj beskonačnoj slici koju sam postavio, sa beskonačnim brojem redova, nalaze svi pozitivni razlomci.

Da bih dokazao da ima „isto toliko" razlomaka koliko i prirodnih brojeva, dovoljno bi bilo da izdvojim jedan prirodni broj svakog elementa na ovoj slici i kako brojanje bude odmicalo uverićemo se da neće ostati nijedan nenumerisani element. Kako to uraditi? Jasno je da ne treba započeti to putovanje pokušavajući da, na primer, iscrpimo prvi red, jer nikada ne bismo prešli na drugi. Taj postupak treba naizmenično da poseže za elementima iz svakog reda da bismo bili sigurni da je pokrivena cela slika. Metod nabrajanja razlomaka takođe je otkrio Kantor, i on je poznat pod nazivom *Kantorov dijagonalni postupak*.

Odnosno:

Razlomak $^1/_1$ označavam brojem 1,
Razlomak $^1/_2$ označavam brojem 2,
Razlomku $^2/_1$ dodeljujem broj 3,
Razlomku $^1/_3$ dodeljujem broj 4,
Razlomak $^2/_2$ preskačem jer sam ga već brojao ($^1/_1 = {}^2/_2$),
Razlomku $^3/_1$ pripisujem broj 5,
Razlomku $^3/_2$ pripisujem broj 6, itd.

Putanja se kreće po dijagonalama koje su sve duže, i na taj način zahvata sve redove i sve stupce. Što više napredujem to sam sigurniji da pobrojavam sve razlomke i prelazim preko razlomaka koji se ponavljaju i koje sam već numerisao, doslovno ih preskačem, poput 3/3 ili 2/2. Šta time pokazujemo? Da uprkos tome što beskonačnost brojeva deluje zgusnutije, ima „isto toliko" racionalnih brojeva koliko i prirodnih. Štaviše, ovakvim numerisanjem razlomcima se može dati uzastopni niz, red, naravno, drugačiji nego što je pravolinijski, i to nam omogućava da objasnimo numerisanje brojeva u *Peščanoj knjizi*. Borhes to verovatno nije znao. Numerisanje stranica koje Borhesu u priči deluje tajanstveno i kojem pripisuje takođe misteriozan razlog, u principu ne krije nikakvu misteriju. Ne postoji kontradiktornost između činjenice da između dve stranice *Peščane knjige* uvek postoji drugačiji niz i činjenice da svaki list može imati jedan broj: isti lukavi štampar koji je mogao da prišije beskonačne stranice Peščane knjige mogao je i da ih numeriše kao što mi to sada činimo.

Beskonačnost i Vavilonska biblioteka

Matematičari, baš kao i Borhes, vole da izraze ideje, da ih ponavljaju, da ih iskoriste najbolje što mogu. Sada kada imam ovu sliku ne mogu da odolim da je ne upotrebim još jednom za drugu temu koja se kod Borhesa ponavlja, a to je tema jezika, na način na koji je prisutna, na primer, u priči „Vavilonska biblioteka".

Pomislimo na trenutak na zamisao „Vavilonske biblioteke", biblioteke sa knjigama koje ne moraju nužno biti razumljive, apsolutnu biblioteku čiji osnovni zakon je: „Dovoljno je da jedna knjiga bude moguća da bi postojala." Borhes utvrđuje alfabet od dvadeset pet simbola, ali mi ćemo, da bismo dali sebi još veću slobodu, zamisliti knjige napisane na svim mogućim jezicima i sačinićemo samo jednu listu, univerzalni alfabet, objedinivši sve znake svih postojećih alfabeta. Počećemo sa dvadeset pet ortografskih znakova koje Borhes pominje (i na taj način ćemo biti sigurni da su sve knjige iz Vavilonske biblioteke na našoj polici). Nastavićemo sa 27 simbola španskog alfabeta. Dodaćemo kao nove simbole 5 vokala sa grafičkim akcentima. Nastavićemo, na primer, sa ćiriličnim simbolima, potom ćemo dodati nemačko ö, i ostale različite simbole koje ima svaki jezik. Tako će bazični alfabet sve više rasti. Da bismo sebi dali prostor ka budućnosti, možemo na primer pretpostaviti da su simboli našeg alfabeta prirodni brojevi, na taj način nam ostaje uvek raspoloživ prostor da dodajemo nove alfabete, nove simbole poput @, ili simbole iz vanzemaljskih jezika koji će u nekom trenutku doći do nas. Brojevi od 1 do 25 odgovaraju ortografskim simbolima knjiga iz Vavilonske biblioteke, broj 26 je A, broj 27 je B, broj 526 će možda biti kineski ideogram, itd.

Setite se da u „Vavilonskoj biblioteci" Borhes ograničava broj stranica koje može da ima svaka knjiga: 410. Mi se sada pitamo kakva bi bila beskonačnost svih različitih knjiga sa *bilo kojim* brojem strana koje mogu da se napišu ovim univerzalnim alfabetom, ako dozvolimo reči *bilo koje* dužine.

Upotrebom iste te slike može se dokazati da je i ovaj skup knjiga *takođe* moguće numerisati. Ideja je, naravno, da u prvi red stavimo knjige sa samo jednom stranicom, u drugi red knjige sa dve stranice, u treći red knjige od tri stranice, itd. I da potom obavimo numeraciju u skladu sa Kantorovom dijagonalnom putanjom. Pošto su sve knjige iz Vavilonske biblioteke i na našim policama, možemo zaključiti da je skup knjiga iz Vavilonske biblioteke takođe pobrojiv.

Zbog čega je to značajno za razumevanje Borhesove priče?

U jednoj zabelešci na kraju priče, Borhes piše da je jedna njegova prijateljica zapazila da čitava zgrada Vavilonske biblioteke bila nepotrebna ili preterana (on koristi reč *beskorisna*) jer bi zapravo sve knjige iz Vavilonske biblioteke mogle da stanu u samo jedan tom. U samo jednu knjigu sa beskonačnim brojem beskonačno tankih strana, „svilenkasti priručnik u kojem bi se svaka stranica širila na druge". Način na koji bi se razne knjige prelivale jedna u drugu u tom jedinstvenom tomu ne bi bilo ništa drugo do Kantorova dijagonalna putanja.

Ta zabeleška kojom se priča završava zapravo je klica ideje čiji će rezultat kasnije biti „Peščana knjiga". To je jedan od načina da predočimo brojne matematičke elemente. Prvi primer, „Vavilonska biblioteka", zahtevan je, opsežan, naravno da ima i druge nijanse i druga značenja, i ne smatram da treba da se svede samo na to. Ali Borhes na kraju nalazi jednu jednostavniju ideju: da se sve knjige mogu objediniti u jedan jedini tom, sa beskonačnim brojem stranica. On kaže: takva knjiga da je svaka njena stranica deljiva. To je zapravo najava priče „Knjiga od peska". Želim da vam skrenem pažnju na taj način njegovog razmišljanja o sopstvenim tekstovima da bih izdvojio jednu suštinsku ideju koja će se ponavljati ili razvijati na drugim mestima. To je prvi primer opšteg postupka, operacija koja podseća na matematičke module.

Sfera čije je središte u svim delovima, a kružnica nigde

Sada ćemo proučiti drugi matematički element u priči „Alef". On se pojavljuje u trenutku kada Borhes treba da opiše Alef, i kaže: „Kako drugima preneti beskrajni Alef koji moje uplašeno pamćenje jedva obuhvata?"[6] (prevod D. Bajić).

Ovde želim još nešto da kažem o simbolu Alefa. Čini mi se da je naročito pogođena figura čoveka čija jedna ruka dodiruje zemlju, a druga pokazuje na nebo, jer je operacija brojanja svojevrstan ljudski pokušaj da se dosegne beskonačnost. Odnosno, ljudsko biće ne može, u svom konačnom životu, u svom „životiću" – kako bi rekao Bjoj Kasares – zaista da popiše sve postojeće brojeve, ali ima način da ih generiše, da ih zamisli i da pristupi toliko velikom broju koliko je potrebno. Počev od otkrića pisanja decimalnih brojeva, počev od deset cifara, možemo dosegnuti koliko god želimo velike brojeve. Iako ograničen u svom zemaljskom položaju, čovek ipak može ispružiti ruku ka nebu. To je pokušaj i poteškoća brojanja. Nešto slično opisuje Borhes: „Kako drugima preneti beskrajni Alef koji moje uplašeno pamćenje jedva obuhvata? Mističari se u sličnom zanosu razbacaju simbolima: da bi označio božanstvo, jedan Persijanac govori o ptici koja je na neki način sve ptice; Alanus de Insulis – o kugli čiji je centar svuda, a obvojnica nigde." Nešto kasnije, Borhes kaže: „Pored toga, nerešiv je glavni problem: popis, makar i delimičan, jedne beskonačne celine."[7] Odnosno, to što on preduzima je opis Alefa, koji je beskonačan. I ne može ga iscrpeti pisanjem, jer je pisanje sekvencijalno, jezik „sledi, odvija se", a to je problem na koji smo maločas ukazali. On stoga mora da predstavi zamisao, dokaz, spisak dovoljno uverljivih slika. To je čuveni popis, pobrojavanje slika koje sledi i na koji ćemo kasnije ukazati.

Druga zamisao na kojoj želim sada da se zadržim jeste sfera koja se pojavljuje i u „Paskalovoj sferi". To je sfera *čije je središte u svim delovima, a kružnica nigde*. Borhes ovde upozorava: „Ne osvrćem se tek tako na te nesagledive analogije." To je vrlo precizna analogija

---

[6] H. L. Borhes, *Izabrana dela (proza, poezija, eseji)*.
[7] *Idem*.

koja doprinosi verodostojnosti te male sfere koju želi da opiše. Da bismo razumeli taj geometrijski pojam, koji na početku izgleda kao igra reči, zamislimo prvo jednu ravan, umesto sfera zamislimo krugove. Ideja je sledeća: sve tačke ravni moguće je obuhvatiti rastućim krugovima čiji centar nije važno gde se nalazi, jer centar može biti bilo gde.

Odrediću centar u bilo kojoj tački, tačka nije važna, i razmotriću sve veće krugove. Što više povećavam prečnik, ti krugovi sve više zauzimaju čitavu površinu ravni. U eseju „Paskalova sfera", kada želi da precizira tu sliku, Borhes opisuje: „Kalođero i Mondolfo zaključuju da je on zamišljao *beskrajno rastuću* sferu i da reči koje navodim imaju dinamički smisao"[8] (prevod Radivoje Konstantinović). Dakle, možemo da zamislimo i zamenimo plan krugom koji sve više raste, jer je sve tačke te ravni moguće obuhvatiti tim krugom. U tom krugu koji se beskonačno širi, kružnica će se izgubiti u beskonačnosti. Ne možemo ograničiti njegov obim. To je, rekao bih, ideja koju Borhes ima. Ako skočimo u beskonačnost, možemo zamisliti da je čitava ravan jedan krug sa središtem u bilo kojoj tački i bez kružnice.

Isti tip konstrukcije važi ako zamislimo trodimenzionalni prostor, odnosno sferu nalik globusu koji raste do beskonačnosti i zauzima sve tačke. Naposletku, univerzum se može zamisliti kao sfera raširena do beskonačnosti. To je sadašnja zamisao univerzuma u savremenoj fizici: mala sfera, beskonačno male veličine i beskonačno koncentrisane mase koja se u nekom trenutku, u velikom prasku, proširila u svim pravcima. Zbog čega je zanimljiva ta „nezamisliva analogija"? Zato što je Alef jedna minijaturna sfera. Ako neko uspe da vidi čitav univerzum kao veliku sferu, mnogo je uverljivija ideja da sve slike univerzuma mogu da se reprodukuju u minijaturnoj sferi na dnu stepenica. Jednostavno, sažimanjem čovek može da prenese čitav univerzum u malu sferu. To je, naravno, samo jedan smisao od mnogih koje Borhes koristi u toj analogiji: smisao na koji obraćamo posebnu pažnju u našem matematičkom modusu „jutros sve vidimo iz vizure skakavca". Ali, kao što sam već rekao, matematika se provlači kroz Borhesove tekstove unutar konteksta koji se odnosi na filozofske i književne reference: zamisao o univerzumu kao sferi povezana je sa čitavom tradicijom misticizma, religijskom, kabalističkom; naposletku, sve te druge konotacije opisane su detaljnije u „Paskalovoj sferi".

Raselov paradoks

Treća ideja je to što bih nazvao „paradoks uvećanja" (tehnički, to je ono što se u logici naziva *autoreferenca,* ali reč „autoreferenca" ima drugačije značenje u književnosti i ne bih želeo da ih mešam. Taj paradoks se pojavljuje u trenutku brojanja, u kojem Borhes odlučuje da pruži delimičan opis slika u Alefu. Ali, dešava se i u drugim fikcijama, kada Borhes stvara svetove koji su veoma prostrani, sveobuhvatni, i naposletku uključuju i njega – ili čitaoce – u svoj delokrug. U „Alefu" se to može videti ovde: „Videh proticanje svoje tamne krvi, videh spoj ljubavi i menjanje smrti, videh Alef, sa svake strane, videh u Alefu zemlju i na zemlji opet Alef i u Alefu zemlju, videh svoje lice i utrobu, videh tvoje lice, osetih vrtoglavicu i zaplakah."

Namena prostranih objekata, uvećavanje, otvara prostor za čudne paradokse i Borhes je sigurno savršeno znao za najpoznatiju od njih, koja se pripisuje Bertrandu Raselu, koji je

[8] H. L. Borhes, *Izabrana dela (proza, poezija, eseji).*

poljuljao teoriju skupova i izazvao jednu od najznačajnijih pukotina u temeljima matematike. Raselov paradoks kaže da ne može da se potvrdi postojanje skupa koji bi sadržao sve skupove, odnosno ne može se potvrditi Alef skupova. To se na brzinu može objasniti na sledeći način: zamislimo da najčešće upotrebljavani skupovi koje možemo pojmiti nisu elementi samih sebe. Na primer, skup svih prirodnih brojeva nije nijedan od prirodnih brojeva. Skup svih drveća nije drvo. Ali, pomislimo sada na trenutak na skup svih pojmova. Skup svih pojmova jeste sam po sebi pojam. Odnosno, iako zvuči čudnovato, ipak je moguće da skup bude element samog sebe. Ako ja postavim skup svih skupova, on će, pošto je i sam skup, morati da bude element samog sebe.

Naposletku, ima skupova koji su elementi samih sebe, i onih koji to nisu. Razmotrimo sada skup svih skupova koji nisu elementi samih sebe.

X={A tako da je A skup i A nije u A}

U X-u će se nalaziti skup prirodnih brojeva, skup svih drveća, skup svih osoba u ovoj sali, itd. Onda se pitamo: da li je X element X-a? Odgovor bi trebalo da bude „da" ili „ne". Međutim, ako bi X bio element samog sebe morao bi da proveri svoje svojstvo unutar ključa. Odnosno, ako X pripada X-u, X nije u X-u. Ali to je apsurdno. Da li to onda znači da X nije element samog sebe? Ali ako X nije element samog sebe, dokazuje svojstvo unutar ključa, a samim tim mora da bude u X-u, odnosno ako X nije element X-a, X mora da pripada X-u. Ponovo apsurd. Ovde imamo skup koji je na ničijoj zemlji, skup koji nije element ni samog sebe.

To je paradoks koji je otkrio Rasel, kada je bio mlad, i poslao je pismo Gotlobu Fregeu, jednom od osnivača logike, koji je upravo nameravao da preda u štampu poslednji tom svog velikog traktata o temeljima matematike, zasnovanog upravo na teoriji skupova. Frege je zahvalio na pošti na kraju svog traktata sledećim patetičnim rečima: „Jedan naučnik teško može da se nađe u nepovoljnijoj situaciji nego što je ona da vidi kako nestaju njegovi temelji upravo u trenutku kada je njegov posao završen. Stavljen sam u taj položaj zahvaljujući pismu gospodina Bertranda Rasela baš kada je moje delo trebalo da uđe u štampu." U tih nekoliko redova Rasel ne samo što je razorio desetogodišnji ili petnaestogodišnji Fregeov posao, već je izazvao jednu od najdubljih kriza u temeljima matematike.

Da bi popularisao taj paradoks, Rasel je pomislio na berberina u selu koji jedino brije muškarce koji sami sebe ne briju. U principu, postojanje čoveka s tim časnim zanimanjem čini se razumnim: berberin iz jednog dela, rekao bi neko, upravo je čovek koji brije sve muškarce koji ne briju sami sebe. Međutim, da li berberin treba da brije sam sebe ili ne treba? Ako brije sam sebe, više nije u grupi muškaraca koje može da brije. Odnosno, ne može da brije samog sebe. Ali s druge strane, ako ne brije sam sebe, ostaje unutar grupe muškaraca koji ne briju sami sebe i zato mora da se brije. Berberin je uhvaćen u zamku logičkog limba u kojem njegova brada raste, a ne može ni da se brije ni da se ne brije u istom trenutku!

Postoji i jedna varijacija, takođe pripisana Raselu, koju Borhes eliptično koristi u „Vavilonskoj biblioteci". Na početku priče „Vavilonska biblioteka" bibliotekar traga za katalogom svih kataloga. Šta su uopšte katalozi? To su knjige čiji tekst predstavljaju naslovi drugih knjiga. Postoje katalozi koji obuhvataju sami sebe u popisu tih naslova, i drugi koji to ne čine. Na taj način čovek može doći do istog paradoksa.

Zbog čega Borhes zanima matematičare?

Ova tri elementa koje smo upravo proučili pojavljuju se u više navrata u Borhesovom delu, oblikovani u književne forme na razne načine. U eseju „Kartezijanstvo kao retorika (ili zbog čega Borhes zanima naučnike?), u knjizi *Borhes i nauka*, autorka Lusila Pagliaj pita se zbog čega su Borhesovi tekstovi tako dragoceni za naučnike istraživače, fizičare, matematičare. Zaključak do kojeg dolazi je to da u Borhesovom delu postoji suštinski esejistička matrica, naročito u njegovom poznom stvaralaštvu. I naravno, svaki tekst nastoji da utemelji tu tvrdnju. To je oštar esej, mislim da predstavlja deo istine. Borhes je pisac koji kreće od ideje: „u početku beše ideja“ i zamišlja svoje fikcije kao otelotvorenje ili avatare apstraktne zamisli. Takođe, postoje fragmenti logičke argumentacije u mnogim pričama. Ta vrsta esejističke matrice na koju se ona odnosi nesumnjivo je jedan od elemenata koje karakteriše izvesna sličnost sa naučnim razmišljanjem. U jedno malom članku koji sam napisao o toj temi, „Priča kao logički sistem“, ukazujem na elemente stila koji naginju ka estetskoj matematici. Pročitaću odatle glavnu potku:

> *Već sam rekao da postoji gomila matematičkih tragova u Borhesovom delu. To je tačno, ali čak i ako ne bi bilo nijednog, čak i u tekstovima koji nemaju nikakve veze s matematikom, postoji nešto u napisanom štivu, neki stilski element koji je očigledno u saglasju sa matematičkom estetikom. Mislim da je ključ tog elementa izražen, neprimetno, u jednom izvanrednom odlomku iz* Istorije večnosti: *„Ne želim da se odreknem platonizma (koji izgleda poput glečera), a da ne iskažem ovo zapažanje, u nadi da ćete ga nastaviti i opravdati:* generičko može biti intenzivnije od konkretnog. *Ima dosta slučajeva koji to ilustruju. Kao mali, kada sam letovao na severu pokrajine, obla ravnica i muškarci koji su pili čaj mate u kuhinji pobudili su moje interesovanje, ali je sam se osećao užasno kada sam saznao da je ta arena bila „pampa“, a ti muškarci „gauči“. Generičko... ima prednost u odnosu na individualne crte.*
>
> *Kada Borhes piše, obično nagomilava primere, analogije, slične pripovesti, varijacije na to što namerava da ispriča. Na taj način je osnovna fikcija koju razvija istovremeno i pojedinačna i generička; njegovi tekstovi odjekuju kao da određeni primer u sebi nosi univerzalnu formu i neprestano na nju aludira. Isti postupak koriste i matematičari. Kada proučavaju neki primer, određeni slučaj, istražuju ga u nadi da će otkriti u njemu intenzivniji trag, i uopšte, da će uspeti da izvedu teoremu. Matematičari vole da veruju da Borhes piše upravo kao što bi oni to činili kada bi ih stavili na probu: sa ponosnim platonizmom, kao da postoji bezbroj savršenih fikcija i jedan pojam o istini u književnosti.*

To na neki način dokazuje moj stav o artikulisanju matematičkog razmišljanja u Borhesovom stilu. Za sada je to tek nešto više od onoga što matematičari zovu „tvrdnja“, nešto što se unapred pretpostavlja, ali u nekom trenutku mora da se dokaže.

Hvala vam što ste danas bili ovde.

*(Sa španskog prevela **Bojana Kovačević Petrović**)*